Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a IX-a

TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT

EDITURA MATHPRESS

CUPRINS

ALGEBRĂ

1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI TEORIA MULŢIMILOR

1.1. NOŢIUNEA DE MULŢIME

Lucrurile cele mai simple se descoperă după îndelungi reflecţii, iar istoria matematică este plină de astfel de întâmplări. Astfel, păsările, de obicei, zboară în stoluri, oamenii în societate trăiesc şi îşi desfăşoară activitatea, formând ceea ce numim generic **mulţimi** (de păsări, de oameni).

Matematicienii ultimelor secole au descoperit un fapt important şi anume că edificiul matematicii are la bază noţiunile de **mulţime** şi de **relaţie** între elementele diferitelor mulţimi. Aceste două noţiuni facilitează accesul la matematică şi permit o bună înţelegere a structurilor sale profunde. Noţiunea de mulţime apare în lucrările matematicianului german Georg Cantor (1845-1918).

Noţiunea de mulţime este o noţiune **primară**, fundamentală, care nu se defineşte. Totuşi, adăugăm următoarele două precizări, care dau termenului de mulţime o semnificaţie diferită de cea din limbajul curent.

1) O colecţie de obiecte este o **mulţime** dacă se poate spune cu certitudine dacă un anumit obiect aparţine sau nu colecţiei.

2) Un acelaşi element nu poate figura mai mult de o dată în mulţime.

Exemple. 1) Mulţimea literelor alfabetului.
2) Mulţimea judeţelor din România.
3) Mulţimea paginilor unei cărţi.
4) Mulţimea elevilor unei clase.
5) Mulţimea claselor unui liceu.
6) Mulţimea triunghiurilor isoscele.
7) Mulţimea punctelor unei drepte.
8) Mulţimea literelor alfabetului figurând în cuvântul „Mississipi" este formată din elementele m, i, s, p, în virtutea convenţiei că un acelaşi element nu se poate repeta într-o mulţime.

Criteriul care defineşte o mulţime trebuie să fie obiectiv, în sensul că punând întrebarea „acel obiect aparţine mulţimii?", răspunsul să poată fi dat fără ambiguitate. Aşa de exemplu, colecţia formată din cele mai bune trei picturi ale lui Grigorescu nu este o mulţime – căci nu putem decide obiectiv care sunt cele mai bune tablouri ale unui pictor.

Nu este posibil de a clasifica definitiv un obiect ca fiind al unei mulţimi, căci cei doi termeni sunt relativi. Astfel, o mulţime poate fi considerată ca element al altei mulţimi. De exemplu, în mulţimea claselor unui liceu, o clasă este un element, iar pe de altă parte, fiecare clasă este o mulţime de elevi.

O mulţime este formată dintr-un număr finit sau infinit de elemente.

Definiţie. O mulţime se numeşte **finită** dacă are un număr finit de elemente.
O mulţime se numeşte **infinită** dacă nu este finită.

Exemple. 1)–5), 8) conţin exemple de mulţimi finite, iar mulţimile din 6), 7) sunt infinite.

Determinarea unei mulţimi. Notaţii

Prezentăm mai jos câteva reguli unanim acceptate în cărţile de matematică şi pe care este bine să le urmăm:

1) Cel mai adesea o mulţime de notează cu o literă mare: $A, B, \ldots, X, \ldots$.
2) În chestiuni teoretice, unde elementele mulţimii nu sunt precizate, vom reprezenta aceste elemente prin litere mici: $a, b, \ldots, x, \ldots$.
3) Cuvântul *mulţime* este simbolizat prin două acolade care încadrează elementele mulţimii considerate, separate unele de altele prin virgulă. Câteodată, în caz de ambiguitate, de exemplu când elementele sunt numere zecimale, se separă elementele prin punct şi virgulă.

Exemple. 1) Dacă mulţimea A este formată din trei elemente prezentate prin literele x, y, z, atunci vom scrie: $A = \{x, y, z\}$.
2) Dacă mulţimea X este formată din numerele zecimale 1,2 şi 2,3, atunci vom scrie $X = \{1,2; 2,3\}$.
3) Dacă mulţimea este infinită, nu se pot scrie toate numerele; se enumeră, câteva dintre ele, suficiente pentru a recunoaşte despre ce mulţime este vorba, apoi se pun puncte de suspensie.

Exemplu. Mulţimea B a multiplilor lui 4 poate fi reprezentată prin
$B = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$.
La fel vom proceda în cazul unei mulţimi care conţine un mare număr de elemente
$C = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$.

4) Fiind dat un element a al unei mulţimi A, nu sunt decât două posibilităţi: a este element din mulţimea A sau a nu este element al lui A.
Pentru a exprima faptul că elementul a se află în mulţimea A, vom nota: $a \in A$ şi citim: „a aparţine lui A".
Faptul că elementul a nu este în mulţimea A, îl notăm prin: $a \notin A$ şi citim: „a nu aparţine lui A".
Semnul $\in$ se numeşte **apartenenţă**, fiind introdus în 1886 de matematicianul italian Giuseppe Peano (1858-1932).

Observaţie. Uneori notăm $A \ni a$ şi citim: „A conţine elementul a" şi negativ, $A \not\ni a$, adică „A nu conţine elementul a".
Există două modalităţi de a determina o mulţime:
1) prin enumerarea elementelor sale;
Exemple. 1) $A = \{x, y, z\}$; 2) $B = \{2, 4, 6\}$.
2) printr-o proprietate caracteristică de care se bucură toate elementele sale. În acest caz, se adoptă notaţia următoare: fie A mulţimea elementelor care au proprietatea P; se notează:
$A = \{x \mid x$ are proprietatea $P\}$ şi citim: „A este mulţimea elementelor x care au proprietatea P".
Litera x desemnează un element arbitrar al mulţimii A; se spune că x descrie mulţimea. Bara care separă litera x de proprietate se citeşte „astfel încât".
Dacă proprietatea P nu este explicitată, se scrie: $A = \{x | P(x)\}$, notaţia $P(x)$ însemnând „x are proprietatea P" sau „P este verificată de x".

Exemple. 1) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$, reprezintă mulţimea numerelor naturale cel mult egale cu 3. Avem deci $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
2) $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x$ divide $10\}$, conţine divizori naturali ai lui 10. Deci $B = \{1, 2, 5, 10\}$.
3) $C = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$. Pentru a determina această mulţime se dau valori lui n, pe rând, când se obţin elemente ale lui C. Pentru $n = 0$ rezultă $x = 0$; pentru $n = 1$, se obţine $x = 2$; pentru $n = 2$, găsim $x = 4$ etc. Obţinem aşadar $C = \{0, 2, 4, \ldots\}$, care este mulţimea numerelor naturale pare.

Mulţimea vidă

Să analizăm următoarele două mulţimi:

$A = \{x | x$ este un judeţ din România, al cărui nume începe cu litera K$\}$ şi

$B = \{x | x$ este un număr prim şi $13 < x < 17\}$.

Examinând cele două mulţimi, constatăm că acestea nu conţin nici un element. Iată că, în matematică, contrar a ceea ce se face în limbajul comun, se obţin mulţimi care nu au nici un obiect. Această mulţime se numeşte **mulţimea vidă** şi se reprezintă prin simbolul $\emptyset$.

Submulţimi. Părţile unei mulţimi

Fie $A = \{1,2,3\}$, $B = \{-1,0,1,2,3,5\}$. Observăm că orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Caracterizăm această situaţie spunând că mulţimea A este o **submulţime** sau **o parte** a lui B.

Definiţie. Spunem că mulţimea A **este o submulţime** sau **o parte** a mulţimii B, dacă orice element din A este element în B.

Notaţie. $A \subset B$ şi citim: „mulţimea A este inclusă în mulţimea B“.

Deci $A \subset B$, dacă şi numai dacă $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

Se consideră că $\emptyset \subset A$ (adică mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi). Dacă $A \neq \emptyset$, atunci clasa tuturor submulţimilor lui A o notăm cu $\mathcal{P}(A)$ (citim: „mulţimea părţilor lui A“). Deci $\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq A\}$.
Dacă $A = \{1,2,3\}$, atunci

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Faptul că $A \not\subset B$ (citim:„A nu este inclusă în B“) se traduce prin „există $x \in A$ astfel încât $x \notin B$“.
Se verifică uşor următoarele proprietăţi ale incluziunii mulţimilor:

Reflexivitatea: $A \subset A$, $\forall A$.
Antisimetria: Dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, atunci $A = B$.
Tranzitivitatea: Dacă $A \subset B$ şi $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

Aplicaţie. Să se determine numărul minim n de întregi care trebuie aleşi din $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$, astfel încât:
a) **suma a doi din cei n întregi să fie pară**; b) **diferenţa a doi din cei n să fie** 5.

R. a) Se ştie că suma a două numere pare sau a două numere impare este un număr par. Considerăm submulţimile lui S, $S_1 = \{1,3,5,7,9\}$ şi $S_2 = \{2,4,6,8\}$. Se aplică **principiul cutiei** (care în esenţă spune că dacă avem n cutii şi $n+1$ beţe care se introduc în cutii, atunci există o cutie în care se află cel puţin două beţe). Deci $n = 3$.
b) Se consideră cinci submulţimi ale lui S, $\{1,6\}, \{2,7\}, \{3,8\}, \{4,9\}, \{5\}$. Pentru $n = 6$, suntem siguri că doi întregi vor fi în aceeaşi mulţime.

Diagrama Venn-Euler

Uneori este comod de a da o reprezentare grafică unei mulţimi pentru a concretiza anumite situaţii. Pentru aceasta se utilizează aşa numita **diagramă Venn-Euler** (John Venn (1834-1923) logician englez; Leonhard Euler (1707-1783) matematician elveţian), formată dintr-o linie simplă închisă (un cerc, un oval, un dreptunghi), în interiorul căreia se scriu elementele mulţimii.
Atragem atenţia că această reprezentare are ca scop **fixarea ideilor şi să faciliteze înţelegerea**. Dacă mulţimea este notată cu o literă, aceasta se scrie lângă linie. Dacă elementele mulţimii nu sunt precizate sau mulţimea este infinită, aceste elemente sunt reprezentate prin puncte situate în porţiunea planului

limitată de linia închisă. Dacă un element nu aparţine mulţimii, el va fi figurat printr-un punct situat în afara liniei.

Exemple.

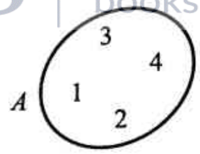


Diagrama lui Venn pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$

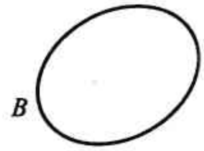
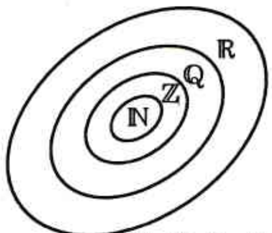


Diagrama lui Venn pentru mulţimea B cu elementele neprecizate

Exemple de mulţimi. Notaţii pentru mulţimi de numere

Mulţimile uzuale de numere pe care le-aţi întâlnit în clasele precedente au notaţii particulare, judicios alese de matematicieni.

1. Mulţimea numerelor naturale este notată cu $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Mulţimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$:
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3. Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$:
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

4. Mulţimea numerelor reale este notată cu $\mathbb{R}$. Aceasta este mulţimea tuturor numerelor pe care le-aţi întâlnit în clasele precedente. Este formată din numerele raţionale şi numerele iraţionale (care nu sunt raţionale – $\sqrt{2}, \pi \dots$). Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

5. Adesea se utilizează mulţimile precedente, din care s-a eliminat zero. Aceste mulţimi se notează prin $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$, ...).

6. De asemenea, utilizăm următoarele notaţii:

$\mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ (mulţimea numerelor reale pozitive sau nule);
$\mathbb{R}_- = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ (mulţimea numerelor reale negative sau nule);
$\mathbb{R}_+^* = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ (mulţimea numerelor reale pozitive, nenule);
$\mathbb{R}_-^* = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 0\}$ (mulţimea numerelor reale negative, nenule).

O interpretare similară au notaţiile: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{Q}_-^*$.

1.2. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Scopul acestui paragraf este de a prezenta principalele mulţimi de numere pe care le-aţi studiat în anii precedenţi, indicând pentru fiecare mulţime:

1) **proprietăţile algebrice**;
2) **proprietăţile de ordine**;
3) **corespondenţa cu punctele unei drepte.**

Având în vedere că unele rezultate au fost studiate în anii trecuţi, le vom reaminti. Construcţia acestor mulţimi de numere depăşeşte cadrul acestui manual.

1.2.1. Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$

Istoria matematicii începe cu problema numărării, ceea ce a condus, după îndelungi tatonări la conceptul fructuos de număr natural.

Matematicienii secolului al XIX-lea au arătat cum se poate construi riguros mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale plecând de la câteva noţiuni elementare.

Axiomatica numerelor naturale cea mai cunoscută a fost elaborată în 1889 de matematicianul italian

Giuseppe Peano (1858-1932).

Numere cardinale. Sub forma cea mai naivă şi primitivă, problema numărării se poate pune sub forma: fiind date două mulţimi A şi B, care dintre cele două mulţimi are mai multe elemente ?

Numerele cardinale indică mărimea mulţimii, respectiv numărul de elemente ale mulţimii.

Numere ordinale. Au apărut din necesitatea de a stabili o ordine în interiorul unei mulţimi.

Numerele cardinale şi ordinale s-au dezvoltat într-o legătură permanentă unele cu altele şi formează cele două aspecte ale numerelor naturale, la care se adaugă de cele mai multe ori prin convenţie şi numărul zero.

Operaţii pe $\mathbb{N}$

Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale nu posedă în sine nici o altă proprietate în afară de aceea de a număra. O astfel de mulţime este amorfă sau altfel spus nu este structurată. Mulţimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, iar $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale nenule.

Adunarea. Cea mai simplă operaţie cu numere naturale face ca la orice două numere $a, b \in \mathbb{N}$ să se asocieze tot un număr natural notat $a + b$.

Proprietăţile adunării pe $\mathbb{N}$

A$_1$. **Adunarea este asociativă**, adică $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

A$_2$. **Adunarea este comutativă**, adică $a + b = b + a$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$.

A$_3$. **Numărul 0 este element neutru pentru adunare**, adică $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$.

Observaţii. 1) Semnul + apare pentru prima dată cu sensul actual într-un manuscris aflat la biblioteca din Dresda şi scris în jurul lui 1480.

2) Adunarea este considerată o operaţie de **ordinul întâi**.

3) Scăderea numerelor indică pe plan abstract ideea de scădere dintr-o mulţime a unei părţi din elementele acelei mulţimi. Scăderea este operaţia inversă adunării. Diferenţa a două numere naturale nu este întotdeauna un număr natural. Diferenţa dintre numerele $a, b \in \mathbb{N}$ se notează $a - b$.

Înmulţirea. La operaţia de înmulţire s-a ajuns prin adunarea mai multor termeni egali. Această operaţie asociază la două numere naturale $a, b \in \mathbb{N}$ numărul natural $a \cdot b$ sau simplu ab.

Proprietăţile înmulţirii pe $\mathbb{N}$

I$_1$. **Înmulţirea este asociativă**, adică $(ab)c = a(bc)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

I$_2$. **Înmulţirea este comutativă**, adică $ab = ba$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$.

I$_3$. **Numărul 1 este element neutru pentru înmulţire**, adică $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$.

Observaţii. 1) Semnele $\cdot$ şi $\times$ sunt utilizate din 1631.

2) Împărţirea numerelor naturale este operaţie inversă a înmulţirii.

Împărţirea a două numere naturale nu este întotdeauna un număr natural.

Împărţirea prin zero nu are sens. Înmulţirea şi împărţirea sunt **operaţii de ordinul doi.**

Ordinea operaţiilor. Dacă intervin mai multe feluri de operaţii, ordinea efectuării operaţiilor are influenţă asupra rezultatului. **Operaţia de ordin superior se efectuează la început.** Operaţiile ale căror semne sunt puncte preced pe cele ale căror semne sunt linii. Dacă operaţiile trebuie făcute în altă ordine, atunci se folosesc parantezele care se vor efectua primele.

Distributivitatea în raport cu adunarea. Legătura între cele două operaţii pe $\mathbb{N}$ este dată de proprietatea

> D. **Înmulţirea este distributivă în raport cu operaţia de adunare**, adică
> $$a(b+c) = ab + ac, \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Pentru $a \in \mathbb{N}^*$ se notează produsul lui a cu el însuşi de n ori, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel: $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n}$.

Ansamblul a^n îl numim **putere** în care a este **baza puterii**, iar n este **exponentul puterii.** Au loc proprietăţile:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2) $(ab)^n = a^n b^n$; 3) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $n > m$; 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$; 5) $(a^n)^m = a^{nm}$.

Convenim ca $a^0 = 1$, $a \neq 0$. Operaţiei 0^0 nu i se acordă nici un sens. Ridicarea la putere este o **operaţie de ordinul trei**.

Ordonarea numerelor naturale

Orice număr natural are un succesor, de exemplu 11 este succesorul lui 10. Aceasta înseamnă că în şirul numerelor naturale $0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$ nu există un ultim număr, acest şir fiind infinit. Numărul 0 (zero) nu este succesor. Orice alt număr natural are un predecesor; aceasta înseamnă că şirul numerelor naturale îl are pe 0 (zero) ca primul număr. Pentru orice două numere naturale n_1, n_2 există una din cele trei relaţii: $n_1 < n_2$ (n_1 este strict mai mic decât n_2), $n_1 = n_2$ (n_1 este egal cu n_2), $n_1 > n_2$ (n_1 este strict mai mare decât n_2). Dacă vrem să arătăm că n_1 este cel mult egal cu n_2 atunci scriem $n_1 \leq n_2$. Această relaţie, notată $\leq$, are următoarele proprietăţi:

> O_1. **Relatia $\leq$ este reflexivă**, adică $a \leq a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$.
>
> O_2. **Relaţia $\leq$ este antisimetrică**, adică dacă pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$ şi $b \leq a$, rezultă $a = b$.
>
> O_3. **Relaţia $\leq$ este tranzitivă**, adică dacă pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$ pentru care $a \leq b$ şi $b \leq c$, rezultă $a \leq c$.

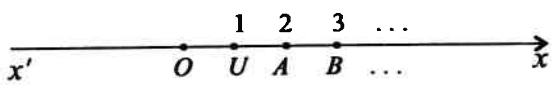
O relaţie, în cazul nostru $\leq$, care are proprietăţile O_1, O_2, O_3 **se numeşte relaţie de ordine.** Între operaţiile de adunare şi înmulţire definite pe $\mathbb{N}$ şi relaţia de ordine $\leq$ există legătura prezentată mai jos sub forma:

Monotonia adunării	dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Monotonia înmulţirii	dacă $a < b$, atunci $ac < bc$, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Această legătură pusă în evidenţă între relaţia de ordine şi operaţiile de adunare şi înmulţire arată că inegalitatea numerelor naturale rămâne valabilă dacă adunăm sau înmulţim în amândouă părţile acelaşi număr.

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{N}$

O dreaptă d pe care fixăm un punct O, **numit origine, un sens pozitiv** şi o **unitate de măsură** se numeşte **axă de coordonate**.



Sensul pozitiv este dat de săgeată, lungimea segmentului $[OU]$ este egală cu 1.

Numărului 0 îi asociem punctul O pe dreaptă. Numărului 1 îi asociem punctul U pe axă (se mai spune că 1 este coordonata sau abscisa punctului U şi scriem $U(1)$) pentru care $OU = 1$; numărului 2 îi asociem pe axă punctul A (2 este coordonata sau abscisa punctului A şi notăm $A(2)$) pentru care $OA = 2$ etc. Să observăm că numerelor naturale le-am asociat puncte pe axa de coordonate situate la dreapta lui O (la dreapta originii O), deci aparţinând semidreptei $[Ox$ pe care din acest motiv o numim **semiaxa pozitivă**.

Necesitatea extinderii mulţimii $\mathbb{N}$

Dacă se dau două elemente a şi b din $\mathbb{N}$ se pot formula două probleme care impun extinderea mulţimii numerelor naturale:

1) Există un element $x \in \mathbb{N}$ pentru care $a + x = b$?

2) Există un element $y \in \mathbb{N}$ pentru care $ay = b$?

Se observă că după valorile atribuite lui a şi b aceste probleme admit sau nu soluţii. De aceea s-a impus crearea altor mulţimi de numere în care aceste probleme să posede întotdeauna cel puţin o soluţie (exceptând, pentru 2) cazul $a = 0$ şi $b \neq 0$).

1.2.2. Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$

Fapte de natură matematică (printre altele rezolvarea ecuaţiei $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $b < a$) sau fizică (temperatura) au condus la extinderea mulţimii $\mathbb{N}$ la mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Numere opuse. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, atunci am numit opusul lui a în raport cu adunarea de pe $\mathbb{N}$, numărul notat $-a$, definit prin egalităţile $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

S-au creat astfel noi obiecte matematice, numerele întregi negative.

Structura algebrică a lui $\mathbb{Z}$

Este dată de un ansamblu de două operaţii, adunarea şi înmulţirea numerelor întregi, cărora le impunem să verifice condiţii similare celor satisfăcute de adunarea şi înmulţirea numerelor naturale, la care se adaugă şi altele ţinând cont de prezenţa pe lângă numerele naturale şi a opuselor acestora.

Acest principiu se va păstra şi la trecerea de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Q}$ sau de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$.

Adunarea şi **înmulţirea** pe $\mathbb{Z}$ sunt două operaţii care asociază fiecărui cuplu (a, b) de numere întregi numerele întregi notate $a + b$ şi respectiv ab.

Proprietăţile operaţiilor pe $\mathbb{Z}$

Proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire valabile pe $\mathbb{N}$ se păstrează şi pe $\mathbb{Z}$, la acestea adăugându-se

A_4. **Elemente opuse.** Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, există elementul $(-x) \in \mathbb{Z}$, numit **opusul lui** x cu proprietatea: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Alte proprietăţi studiate au fost:

P_1. Dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$, $ac = bc$.
Egalitatea este compatibilă cu adunarea şi înmulţirea.

P_2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a + c = b + c$, atunci $a = b$ (**Reducerea a doi termeni asemenea**).
Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $ac = bc$, $c \neq 0$, atunci $a = b$ (**Simplificarea printr-un număr nenul**).

P_3. **Regula semnelor la produs.** Dacă $a, b > 0$, atunci $ab > 0$; dacă $a, b < 0$, atunci $ab > 0$;
dacă $a > 0$, $b < 0$ sau $a < 0$, $b > 0$, atunci $ab < 0$;
dacă unul din factorii a, b este zero, atunci $ab = 0$.

În cazul lui $\mathbb{Z}$ diferenţa a două numere întregi este un număr întreg.
Ridicarea la putere a unui număr întreg se defineşte ca în cazul ridicării la putere a unui număr natural.
Notăm $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ mulţimea numerelor întregi negative, iar cu $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ mulţimea numerelor întregi nenegative.

Ordonarea numerelor întregi. Valoarea absolută a unui număr întreg

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ definim **valoarea absolută** sau **modulul** lui a, numărul nenegativ

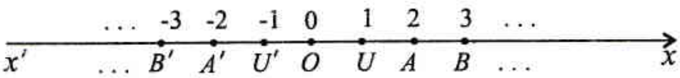
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă} \quad a < 0. \end{cases}$$

Dacă $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \neq n_2$, atunci sunt de discutat trei cazuri:
1) $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ când s-a văzut cum se face ordonarea;
2) $n_1 \in \mathbb{Z}_-$, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$ atunci $n_1 < n_2$;
3) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_-$ când $n_1 < n_2$ dacă $|n_1| > |n_2|$.
Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine pe $\mathbb{Z}$, care păstrează monotonia adunării, iar pentru înmulţire regula se completează astfel:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{dacă } a < b, \text{ atunci } ac < bc, \text{ dacă } c \in \mathbb{N}^*; \\ \text{dacă } a < b, \text{ atunci } ac > bc, \text{ dacă } c \in \mathbb{Z}_-. \end{array}}$$

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{Z}$

Am reprezentat pe axa de coordonate $x'x$ numerele naturale prin punctele O, U, A, $B, \dots$ situate pe semiaxa $[Ox$ pe care am numit-o semiaxa pozitivă.



Punctele U, A, $B, \dots$ sunt situate pe această axă la dreapta lui O.
Numărului negativ -1 îi asociem pe axă punctul U' situat la stânga lui O şi pentru care $OU' = 1$. Spunem că punctul U' are coordonata -1 şi scriem $U'(-1)$. Numărului -2 îi asociem pe axă punctul A' situat la stânga lui O, pentru care $OA' = 2$. Spunem că A' are coordonata -2 şi scriem $A'(-2)$, etc.

1.2.3. Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$. Necesitatea extinderii mulţimii $\mathbb{Z}$

Ecuaţia $5x = 3$ în $\mathbb{Z}$ nu are soluţie. Se impune deci extinderea mulţimii $\mathbb{Z}$ la o altă mulţime în care ecuaţii de forma $ax = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ să aibă soluţie. Această mulţime o reprezintă mulţimea numerelor raţionale notată cu $\mathbb{Q}$ şi definită ca fiind egală cu $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$, unde $\dfrac{m}{n}$ se numeşte fracţie (m = numărătorul care indică numărul de părţi, iar n = numitorul care indică în câte părţi a fost împărţit întregul).
Deci un număr raţional înseamnă o fracţie $\dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. De asemenea, toate fracţiile $\left(\dfrac{mk}{nk}\right)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ reprezintă acelaşi număr raţional $\dfrac{m}{n}$.
Două fracţii $\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{p}{q}$ spunem că sunt echivalente dacă $mq = np$. Ori se constată imediat că $\dfrac{m}{n}$ este echivalentă cu orice fracţie $\dfrac{mk}{nk}$.
Deci două fracţii echivalente dau acelaşi număr raţional.

Exemple. Toate fracţiile $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \ldots\right)$ obţinute prin amplificare sau simplificare, care reprezintă aceeaşi cantitate, reprezintă **numărul raţional unic** $\frac{3}{5}$.

Fracţiile cu numitorul 1 şi cele obţinute prin amplificarea lor sunt conţinute tot în mulţimea numerelor raţionale. De exemplu: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots$. Ele pot fi substituite una alteia. Numărul întreg 0 poate fi înlocuit cu orice fracţie cu numărătorul egal cu zero. **Numitorul zero este exclus.**

Probleme rezolvate

1. Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru ca fracţiile $\frac{2+n}{6+2n}$ şi $\frac{3}{4}$ să fie echivalente.

R. Trebuie să avem egalitatea $4(2+n) = 3(6+2n)$. De aici $n = -5$.

2. Arătaţi că nu există numere raţionale $\frac{m}{n}$ astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$.

R. Presupunem că $(m, n) = 1$. Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$ rezultă $m^2 = 3n^2$, $(*)$. Cum $(m, n) = 1$ se obţine $3 \mid m^2 \Rightarrow 3 \mid m$. Fie $m = 3m_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$. Egalitatea $(*)$ devine $3m_1^2 = n^2$, $(**)$, iar de aici $3 \mid n^2$ şi deci $3 \mid n$, adică există $n_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n = 3n_1$. Am obţinut că $3 \mid m$, $3 \mid n$, adică $3 \mid (m, n) = 1$, contradicţie. Deci nu există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ cu $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$.

3. Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţia $\frac{5}{2k-1} \in \mathbb{Z}$.

R. Fracţia este număr întreg dacă $2k-1$ divide 5, adică dacă $2k - 1 \in \{-1, 1, -5, 5\}$. De aici $k \in \{0, 1, -2, 3\}$.

4. Dacă $\frac{3}{7} = 0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, atunci precizaţi a_{2009}.

R. Observăm că $\frac{3}{7} = 0,(42857)$ şi din $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 8$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$, iar $2009 = 401 \cdot 5 + 4$, deci $a_{2009} = a_4 = 5$.

Probleme propuse

1. Găsiţi trei valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care fracţia $\frac{3n}{8}$ este reductibilă.

2. Determinaţi $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţiile $\frac{2+k}{3}$ şi $\frac{4+k}{5}$ sunt echivalente.

3. Arătaţi că nu există numere raţionale $\frac{m}{n}$ astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$.

4. Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{3}{2k+1} \in \mathbb{Z}$.

5. Determinaţi trei valori ale lui $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţia $\frac{10}{k+1}$ este reductibilă.

6. Determinaţi trei valori ale lui $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât fracţia $\frac{2k+1}{3k+2}$ să fie ireductibilă.

7. Dacă $\frac{2}{7} = 0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, să se precizeze a_{2010}.

8. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, atunci să se arate că $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

9. Dacă $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, atunci să se arate că $\frac{a}{b} < \frac{a+c+e}{b+d+f} < \frac{e}{f}$.

10*. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ atunci $\frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2} < \frac{a+2}{a+3}$. Să se arate că $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2005}{2006} \cdot \frac{2008}{2009} < \frac{1}{12}$.

Indicaţie. Fie P produsul. Atunci $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}\cdot\frac{2008}{2009}=\frac{1}{2009}$, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, $\ldots$, $\frac{2005}{2006}<\frac{2006}{2007}<\frac{2007}{2008}\Rightarrow P^3<\frac{1}{2009}$; $\frac{2008}{2009}<1$.

Reprezentarea unui număr raţional

Un număr raţional se poate reprezenta sub două forme: 1) **sub formă de fracţie ordinară** $\left(\frac{m}{n}\right)$ sau 2) **sub formă de fracţie zecimală (finită sau infinită periodică)**. Reamintim procedeul de trecere de la o formă la alta.

Cazuri particulare. Fie $q_1=\frac{1}{2}$, $q_2=\frac{1}{3}$, $q_3=\frac{19}{55}$.
Vom trece de la forma de fracţie ordinară la cea de fracţie zecimală aplicând algoritmul de împărţire şi obţinem

$q_1=0,5,\quad q_2=0,33\ldots3\ldots,\quad q_3=0,3454545\ldots$

sau scrise utilizând perioada astfel

$q_1=0,5,\quad q_2=0,(3),\quad q_3=0,3(45).$

Fracţiile zecimale obţinute în urma împărţirii se numesc **reprezentările zecimale** ale numerelor raţionale q_1, q_2 şi respectiv q_3.
Fracţia q_1 are reprezentarea zecimală finită, având după virgulă un număr finit de cifre semnificative, iar în rest zerouri. Fracţia q_2 are reprezentare zecimală periodică simplă, deoarece perioada (3) urmează imediat după virgulă, iar fracţia q_3 are reprezentarea zecimală periodică mixtă, deoarece perioada (45) nu urmează imediat după virgulă (are după virgulă o parte neperiodică – aici 3).
Acum pentru a trece de la fracţiile zecimale la cele ordinare se procedează aşa cum s-a văzut în gimnaziu astfel:

$q_1=0,5=0+\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\qquad q_2=0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\qquad q_3=0,3(45)=\frac{345-3}{990}=\frac{342}{990}=\frac{19}{55}.$

De fapt, ultimele scrieri au următoarea argumentaţie: $10q_2=3,(3)$ sau $10q_2-q_2=3\Leftrightarrow 9q_2=3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow q_2=1/3$ şi respectiv $10q_3=3,(45)$, unde notăm $x=3,(45)$ şi avem $100x=345,(45)$, iar de aici prin scădere $100x-x=342\Leftrightarrow 99x=342\Leftrightarrow q_3=\frac{19}{55}$.

Cazul general. O fracţie zecimală finită are forma:

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}$, unde $a_k,a_{k-1},\ldots,a_1,a_0,a_{-1},\ldots,a_{-p}$ sunt cifre şi este egală în baza zece cu:

$$a=a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{10^2}+\ldots+\frac{a_{-p}}{10^p}.$$

O fracţie zecimală infinită are forma:

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots$, şi este egală în baza zece cu

$$a=a_k\cdot10^k+\cdot+a_1\cdot10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{10^2}+\ldots.$$

Observaţie. O fracţie zecimală finită poate fi considerată ca o fracţie zecimală infinită prin adăugare de zerouri.

O fracţie zecimală infinită periodică simplă are forma

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,(a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p})$, şi reprezintă numărul raţional

$\boldsymbol{a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0+\frac{a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}}{\underbrace{99\ldots9}_{p}}}$, **unde grupul de cifre $a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}$ se numeşte perioadă.**

O fracţie zecimală infinită periodică mixtă are forma

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}\ldots a_{-i}(b_1\ldots b_p)$, şi reprezintă numărul raţional